Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования
«Воронежский экономико-правовой институт»
(АНОО ВО «ВЭПИ»)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по учебно-методической работе
_____ Е.Н. Григорьева
«_____» _____ 20_16_ г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Б1.В.11 Математическая статистика
(наименование дисциплины (модуля))

37.03.01 Психология
(код и наименование направления подготовки)

Направленность (профиль) Психология
(наименование направленности (профиля))

Квалификация выпускника Бакалавр
(наименование направленности (профиля))

Форма обучения Очная, заочная
(очная, очно-заочная, заочная)

Рекомендован к использованию Филиалами АНОО ВО «ВЭПИ».

Воронеж
2016

Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ по дисциплине (модулю) рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной информатики, год начала подготовки – 2016.

Протокол заседания от «12» февраля 2016 г. № 7

Заведующий кафедрой А.И. Кустов

Разработчики:

Профессор А.Г. Курина

Лабораторная работа № 1

Классическое определение вероятности – (0 ч./3 ч.)

Цель работы: Определение Вероятности случайного события.

1. Краткие теоретические сведения

Классическая схема позволяет вычислять вероятности без проведения случайного эксперимента, основываясь лишь на свойстве симметрии возможных исходов испытания, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой.

2. Порядок выполнения работы и содержание отчета

Задание: Определение: Вероятностью случайного события А, называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию А, к числу всех равновозможных исходов испытания, составляющих полную группу несовместных событий.

P(A)=

При непосредственном подсчете вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Простейшими из них являются перестановки, сочетания, размещения и разбиения.

Оборудование: Персональный компьютер. Математическое обеспечение.

Операционная система WINDOWS и EXCEL 7.0.

Содержание отчета:

Перестановки отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов. Количество перестановок из n элементов:

Пример 1: Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение только порядок соседей.

Отметим, что вращение людей вокруг стола не меняет их взаимного расположения, поскольку соседи справа и слева остаются прежними. Если место за столом уникально, то существует 10! Способов рассадить людей за столом. Существует 10 вращений вокруг стола, поэтому делим на 10 и получаем 9! Способов рассадить людей за круглым столом, если значение имеет только порядок соседей.

Пусть М – множество, состоящее из n элементов.

Размещением из n элементов по m или упорядоченной (n,m)–выборкой, называется любой кортеж, состоящий из m, попарно различных элементов множества М. Число размещений из n по m элементов:

Пример 2: Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, …, 9, если все цифры различны.

Существует

Сочетанием из n элементов по m или неупорядоченной (n,m)–выборкой, называется любое подмножество множества M, состоящее из m элементов.

Надо заметить, что количество сочетаний отличается от числа размещений количеством перестановок каждого сочетания, то есть

Пример 3: Сколько существует вариантов выбора 5 карт трефовой масти из колоды, состоящей из 54 карт.

В колоде имеется 13 треф, из которых выбирается 5, поэтому

Пусть множество M разбито на k таких различных типов, что имеется n1 неразличимых объектов типа 1, n2 неразличимых объектов типа 2, и, вообще, ni неразличимых объектов типа i (i=1,2,3,…,k), тогда количество различных размещений элементов множества:

Пример 4: Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 4 одинаковых учебника по математике, 6 одинаковых по информатике, 2 одинаковых по химии.

Если трактовать повторения как возвращения объекта во множество M и повторное его использование, то возникает идея размещений и сочетаний с повторениями. Их количество можно вычислить по формулам:

– количество размещений из n элементов по m с повторениями.

– количество сочетаний из n элементов по m с повторениями.

Пример 5: Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, …, 9.

Так как нет ограничения на повторение цифр, то существует

Теорема: Если необходимо выбрать хотя бы по одному объекту из n по m с повторением, то количество различных сочетаний равно

Пример 6: Если в булочной продается 10 видов различных пончиков, то сколькими способами можно выбрать 12 пончиков.

Поскольку 12 пончиков выбираются из 10 видов с повторениями, то

Пример 7: Если в булочной продается 10 видов различных пончиков, то сколькими способами можно выбрать 12 пончиков, если необходимо выбрать хотя бы по одному пончику каждого вида .

Поскольку 12 пончиков выбираются из 10 видов с повторениями, то

Пример 8: Найдем количество различных решений уравнения , где каждое слагаемое в левой части – неотрицательное число. Это эквивалентно вопросу о том, сколько существует выборок вида , где имеется объектов типа и , но количество таких выборок - это количество различных сочетаний из 25 элементов по 5 элементов с повторениями. Итак, существуют

В среде MathCad нет встроенных функций для подсчета количества способов выбора объектов, поэтому необходимо воспользоваться возможностью программирования.

Чтобы создать программный модуль:

Введите выражение, которое будет находиться слева от знака присваивания (имя функции);

Вызовите на экран панель Programming (программирование);

Нажмите на кнопку Add line1 необходимое число раз;

В появившиеся введите необходимый программный код.

Для подсчета факториала можно организовать цикл. В среде MathCad это можно сделать с помощью оператора for и ранжирванной переменной, которая пробегает некоторое множество значений.

Фрагмент документа MathCad для подсчета факториала:

После того как программный модуль полностью определен и ни один из местозаполнителей ни остался пустым, функция может использоваться обычным образом.

Пример решения задачи на подсчет вероятности в среде MathCad:

Задачи к лабораторной работе №1

Задание №1. Создать в среде MathCad программный модуль для каждой из комбинаторных конфигураций.

Задание №2. Решить задачи своего варианта при помощи функций, полученных в задании №1.

Варианты заданий к лабораторной работе №1.

Вариант №1.

Задача №1. Найти вероятность того, что в случайно выбранном четырехзначном числе все цифры различны и оно образованно из цифр 2, 4, 6, 8, 9.

Задача №2. На полке расположены 10 различных книг по математике, 12 – по физике, 16 – по химии. Найти вероятность того, что книги по какой-либо тематике окажутся рядом.

Задача №3. Из группы, состоящей из 12 мужчин и 20 женщин, выбирается комитет из 14 человек. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется 6 мужчин.

Вариант №2.

Задача №1. Найти вероятность того, что наугад выбранное четырехзначное число будет иметь сумму цифр равную 9.

Задача №2. Числа натурального ряда до 20 расставлены в случайном порядке. Найти вероятность того, что числа 1, 2, 3, 4 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

Задача №3. На полке расставлены наудачу 10 книг. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом.

Вариант №3.

Задача№1. Найти вероятность того, что среди пяти мужчин и пяти женщин, случайно рассаженных за круглым столом, никакие двое мужчин не сидят рядом, если имеет значение только порядок соседей.

Задача №2. Числа натурального ряда до 20 расставлены в случайном порядке. Найти вероятность того, что числа 1, 2, 3, 4 расположены рядом.

Задача№3. На каждой из семи карточек написаны буквы е, в, и, н, о, с, ь. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут рядом. Найти вероятность, что получится слово «осень.

Вариант №4.

Задача №1.Найти вероятность того, что случайно выбранное четырехзначное число образованно из цифр 1, 2, 3, 4, 5.

Задача №2. Найти вероятность того, что случайно выбранной перестановке слова «Эквивалентность» можно будет прочесть слово «лето».

Задача №3. В ящике 20 деталей, среди которых 9 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 12 окажется не более одной нестандартной детали.

Вариант №5.

Задача №1. Найти вероятность того, что, случайно расставленные пять мальчиков и шесть девочек встанут в ряд таким образом, что ни две девочки, ни два мальчика не будут стоять рядом.

Задача №2. В булочной продается 10 различных видов пончиков. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 24 пончиков имеется хотя бы по одному пончику разного вида.

Задача №3. Группа студентов, состоящая из 10 юношей и 15 девушек, делится на две группы по 12 и 13 человек. Найти вероятность того, что в каждой из подгрупп по 5 юношей.

Вариант №6.

Задача №1. Найти вероятность того, что, случайно расставленные пять мальчиков и пять девочек встанут в ряд таким образом, что ни две девочки, ни два мальчика не будут стоять рядом.

Задача №2. Брошено 10 игральных костей. Предполагая, что все комбинации выпавших очков равновероятны, найти вероятность, что выпала хотя бы одна «5».

Задача №3. Из 30 последовательных натуральных чисел отбирается 10 различных чисел. Найти вероятность того, что среди этих чисел три делится на пять.

Вариант №7.

Задача №1. Среди всех четырехзначных чисел, состоящих из различных цифр, наугад выбирают одно. Найти вероятность того, что оно состоит из цифр 3, 4, 8, 0.

Задача №2. Цветочник продает пять видов цветов. Найти вероятность того, что произвольно составленный букет из 7 цветков будет иметь хотя бы по одному цветку разного типа.

Задача №3. На каждой из девяти карточек написаны буквы е, в, и, и, н, о, с, ь, и. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут рядом. Найти вероятность, что получится слово «осень».

Вариант №8.

Задача №1.Найти вероятность того, что пяти карточный расклад из колоды в 36 карт содержит четырех тузов.

Задача №2. Из всех двузначных чисел отбирается 10. Найти вероятность того, что все цифры имеют сумму цифр, равную 8.

Задача №3. В соревнованиях участвуют 12 команд, из которых случайным образом формируют две группы по 6 команд. Всего имеется 4 команды экстра – класса попадут в одну и ту же группу.

Вариант №9.

Задача №1. В записанном телефонном номере 134- _ _- _ _ стерлись четыре последние цифры. Найти вероятность того, что стерлись одинаковые цифры, предполагая, что все комбинации равновероятны.

Задача №2. В корзине находится 26 красных, 10 зеленых шаров. Найти вероятность, что из 14 наудачу выбранных шаров два будут зелеными.

Задача №3. На полке расставлены наудачу 10 книг. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом, в определенном порядке.

Вариант №10.

Задача №1. Найти вероятность того, что среди трехзначных чисел выбрано число, меньшее 450.

Задача №2. В корзине находится 26 красных, 10 зеленых шаров. Шар достают, фиксируют цвет и опускают назад. Найти вероятность, что из 14 наудачу выбранных шаров два будут зелеными.

Задача №3. Какова вероятность того, что среди вынутых наудачу семи карт полной колоды (54 карты) три окажутся трефовой масти.

3. Контрольные вопросы

1. Классическое определение вероятности.
2. Частота появления событий, относительная частота.
3. Статистическое определение вероятности. Его недостаток.
4. Свойства вероятности.
5. Перестановки.
6. Размещения.
7. Сочетания.
8. Разбиения.
9. Размещения и сочетания с повторениями.
10. Комбинаторный принцип сложения.
11. Комбинаторный принцип умножения.
12. Достоверное и невозможное события.

Лабораторная работа №2
Основные законы распределения случайных величин. Биномиальный закон распределения.
«Формула Бернулли» – (0 ч./3 ч.)

Цель работы: Освоение методов индуктивной статистики.

1. Краткие теоретические сведения

При проведении ряда повторных независимых испытаний событие А может появиться с некоторой вероятностью p и не появиться с вероятностью 1-p=q. Ставится задача определить вероятность того, что в n испытаниях событие А появится ровно m раз. Искомая вероятность определяется отношением:

Данная формула является единственной точной формулой в схеме независимых повторных испытаний. Однако, использовать ее можно в ограниченных условиях ($n \leq 15$, p отлично от 0 и 1). Поэтому, на практике часто используют приближенные формулы:

– формула Пуассона, где $\lambda = np$.

Исходя из условия, формулу Пуассона удобно применять при $n \to \infty$, $p \to 0$. Если же p существенно отличается от нуля, то используется локальная теорема Муавра-Лапласа:

, где

Отыскание вероятности того, что число m появления события А заключено в некотором интервале от m1 до m2 связано с интегральной теоремой Муавра- Лапласа: ,

где ,

Если npq сравнительно невелико, то лучшее приближение дает формула ,

где ,

Интегральная теорема Муавра- Лапласа позволяет найти вероятность того, что отклонение относительной частоты появления некоторого события m/n от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного положительного числа ε:

, где

Можно определить количество испытаний необходимых для того, чтобы отклонение относительной частоты успехов от вероятности p было меньше ε с вероятностью большей или равной β, то есть найти n, для которого выполняется неравенство:

Доказано, что число n обеспечивает выполнение этого неравенства, если оно удовлетворяет соотношению ,

где x_β –решение уравнения $\Phi(x_\beta)=$

Если вероятность p известна, то необходимое число испытаний определяется формулой ,

значение корня уравнения Ф(xβ)=a дает функция qnorm(a,0,1). Для вычисления значений функции Лапласа Ф(x) предназначена функция pnorm(x,0,1).

Список некоторых распределений, представленных в библиотеке MathCad, и имена соответствующих функций:

биномиальное распределение – dbinom(k,n,p), pbinom(k,n,p), qbinom(k,n,p);

нормальное распределение – dnorm(x,μ,σ), pnorm(x,μ,σ), qnorm(x,μ,σ);
распределение Пуассона – dpois(x,λ), pnorm(x,μ,σ), qnorm(x,μ,σ).

2. Порядок выполнения работы и содержание отчета

Задание №1. Провести исследование точности асимптотической формулы Пуассона или Муавра - Лапласа. Для этого выберите, исходя из условий задачи, необходимую формулу, проведите вычисления по точной формуле и по приближенной. Проведите вычисления для n1 и p1. Сделайте выводы.

Задание №2. Решить задачу по точной формуле Бернулли и с помощью подходящей приближенной формулы.

Задание №3. Найти необходимое число испытаний в заданных условиях, для того чтобы относительная частота появления события не превысила данного числа ε.

Оборудование: Персональный компьютер.

Математическое обеспечение: Операционная система WINDOWS и EXCEL 7.0.

Содержание отчета:

Этапы обработки данных:

1) Выберите, исходя из условий задачи, необходимую формулу, проведите вычисления по точной формуле и по приближенной;

2) Проведите вычисления.

3) Сделайте выводы.

4) Дать интерпретацию полученных результатов.

Задачи к лабораторной работе № 2

Вариант №1. Задача №1. Провайдер обслуживает n=1000 абонентов сети Интернет. Вероятность того, что любой абонент захочет войти в сеть в течение часа равна p=0,003. Найти вероятность того, что в течение часа более k=3 абонентов попытаются войти в сеть. (n1=10 и p1=0,3)

Задача №2. В роддоме да месяц рождается 600 детей найдите вероятность того, что среди этих детей не более 300 мальчиков. Вероятность рождения мальчика p=0,51.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,9 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности

не более, чем на ε=0,02. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,016).

Вариант №2.

Задача №1. Провайдер обслуживает n=1700 абонентов сети Интернет. Вероятность того, что любой абонент захочет войти в сеть в течение часа равна p=0,0023. Найти вероятность того, что в течение часа более k=6 абонентов попытаются войти в сеть. (n1=17 и p1=0,23)

Задача №2.Вероятность поражения мишени при одном выстреле p=0,8. Найти вероятность того, что при 1000 выстрелах мишень будет поражена ровно 850 раз.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,91 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,03. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,05).

Вариант №3.

Задача №1. Вероятность того, что произвольно выбранный абонент сети Интернет – студент равна p=0,41. Найти вероятность того, что среди n=10000 абонентов некоторого провайдера студентов не менее k1=4000 и не более k2=6000. (p1=0,35, n1=1000, k1.1=400, k1.2=600).

Задача №2. Монета брошена 5000 раз. Найти вероятность того, что герб выпал ровно 2500 раза.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,92 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,04. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,1).

Вариант №4.

Задача №1. Вероятность того, что произвольно выбранный абонент сети Интернет – студент равна p=0,46. Найти вероятность того, что среди n=14000 абонентов некоторого провайдера студентов не менее k1=4400 и не более k2=6400. (p1=0,85, n1=1400, k1.1=440, k1.2=640).

Задача №2. Игральная кость брошена 2000 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет не более 300 раз.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,93 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,015. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,02).

Вариант №5.

Задача №1. Магазин продает в течение одного дня n=2000 коробок конфет, часть которых с сюрпризом. Вероятность того, что коробка с сюрпризом, равна p=0,002. Найти вероятность того, что в течение дня продано более k=6 коробок с сюрпризом. (n1=20 и p1=0,2)

Задача №2. Игральная кость брошена 1000 раз. Найти вероятность того, что пятерка выпадет не менее 100 раз.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,94 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,05. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,04).

Вариант №6. Задача №1. Магазин продает в течение одного дня n=2400 коробок конфет, часть которых с сюрпризом. Вероятность того, что коробка с сюрпризом, равна p=0,0016. Найти вероятность того, что в течение дня продано более k=8 коробок с сюрпризом. (n1=24 и p1=0,16)

Задача №2. Монета брошена 600 раз. Найти вероятность того, что «орел» выпадет не менее 290 и не более 310 раз.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,95 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,023. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,056).

Вариант №7.

Задача №1. Банк посещают в течение дня n=100 человек. Вероятность того, что человек снимет деньги со счета равна p= 0,48. Найти вероятность того, что в течение дня деньги со счета снимут k=50 человек. (n1=10 и p1=0,048)

Задача №2. Вероятность появления события в каждом из 800 испытаний составляет p=0.7. Найти вероятность того, что событие наступит в большинстве случаев.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,96 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,06. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,012).

Вариант №8.

Задача №1. Банк посещают в течение дня n=200 человек. Вероятность того, что человек снимет деньги со счета равна p= 0,55. Найти вероятность того, что в течение дня деньги со счета снимут k=100 человек. (n1=20 и p1=0,055)

Задача №2. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна p=0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит не более пяти бракованных книг.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,97 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,025. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,06).

Вариант №9.

Задача №1. Вероятность того, что человек, посетивший магазин, купит что- либо, равна p=0,67. Найти вероятность того, что среди n=22000 посетителей магазина покупателей окажется не менее k1 =6200 и не более k2 =8200. (p1=0,75, n1=2200, k1.1=620, k1.2=820).

Задача №2. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути p=0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено более 15 изделий.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,98 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,08. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,3).

Вариант №10.

Задача №1. Вероятность того, что человек, посетивший магазин, купит что- либо, равна p=0,4. Найти вероятность того, что среди n=19000 посетителей магазина покупателей окажется не менее k1 =4900 и не более k2 =6900. (p1=0,35, n1=1900, k1.1=490, k1.2=690).

Задача №2. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя любого элемента в течение времени T равна0,001. Найти вероятность того, что за время T откажут не более 6 элементов.

Задача №3. Сколько коробок конфет необходимо проверить, чтобы с вероятностью не меньшей β=0,99 можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза не будет отличаться от заявленной вероятности не более, чем на ε=0,039. (Для сравнения решить задачу при условии, что известна вероятность появления сюрприза p=0,08).

3. Контрольные вопросы.

1. Дайте определение независимых и несовместных событий.
2. Как с помощью формулы Бернулли вычислить вероятность того, что событие наступит:

- менее m раз;
- более m раз;
- не менее m раз;
- не более m раз.

3. Перечислите ряд практических задач для которых схема Бернулли является базовой.
4. Опишите формальную схему Бернулли.
5. При каких условиях применима формула Пуассона.
6. Опишите схему применения локальной и интегральной теорем Муавра- Лапласа.
7. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности при независимых испытаниях.